CONCOURS ESIGETEL - SESSION MAI/JUIN 2000

Série PC

# MATHEMATIQUES 1
# ANALYSE

DUREE 4 HEURES
COEFFICIENT 5

Nombre de pages : 3

**Le sujet se compose deux problèmes indépendants l'un de l'autre.**

PROBLÈME I :

**Partie I :**

**Notations et rappels :**

• Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt$. On admet que :

$$W_n > 0 \text{ et } (2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n$$

• Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$.

**1** Pour $n \in \mathbf{N}$, on considère $J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n} t dt$.

**a)** Montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ J_{n+1} - J_n = \frac{-1}{2n+1} J_{n+1} - \frac{2}{2n+1} \int_0^{\pi/2} t \sin t \cos^{2n+1} t dt$$

**b)** En déduire :

$$J_{n+1}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) - J_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)} W_{n+1}$$

puis :

$$\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{W_n} = -\frac{2}{(2n+2)^2}$$

**c)** En déduire, pour $n \in \mathbf{N}^*$, une expression de $S_n$ en fonction de $\frac{J_n}{W_n}$ et de $\frac{J_0}{W_0}$.

**2 a)** Expliquer rapidement pourquoi, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $t \leqslant \frac{\pi}{2} \sin t$.

**b)** En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$ :

$$0 < J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1}) = \frac{\pi^2 W_n}{8(n+1)}$$

**b)** Conclure que la série de terme général $\frac{1}{p^2}$ est convergente et donner la valeur de $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$.

**c)** Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S'_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2}$. Exprimer $S'_{2n+1}$ en fonction de $S_n$ et de $S_{2n+1}$.

**d)** Pourquoi la suite $\left(S'_n\right)$ est-elle convergente ? En déduire que $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

**Partie II :**

**1 a)** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+,\ \forall q \in \mathbf{N}^*,\ \left|\ln(1+x) - \sum_{p=1}^{q} (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p}\right| \leqslant \frac{x^{q+1}}{q+1}$$

**b)** Conclure que si $x \in [0,1]$, la série de terme général $\frac{(-1)^{p-1} x^p}{p}$ est convergente et expliciter la valeur de : $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1} x^p}{p}$

**2** Soit $\varphi : ]0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. **a)** Montrer que $\varphi$ se prolonge par continuité sur $[0,1]$ en une fonction qui sera encore notée $\varphi$.

**b)** En encadrant convenablement $\varphi$ et en utilisant la fin de la Partie I, donner la valeur de $\int_0^1 \varphi(x)dx$.

**3 a)** Montrer que :

$$n\int_0^1 \ln(1+x^n)dx = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}n}{p(np+1)}$$

**b)** Montrer qu'il existe une constante réelle $C$ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*,\ \left|\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}n}{p(np+1)} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2}\right| \leqslant \frac{C}{n}$$

**c)** Conclure que $\int_0^1 \ln(1+x^n)dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{12n}$.

**4** Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère $u_n = \int_0^1 \dfrac{dx}{x^n+1}$.

**a)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et préciser sa limite.

**b)** Calculer $\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$ en fonction de $n$ et de $u_n$.

**c)** En déduire que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

## PROBLÈME II

**Rappel :** $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Le but de ce problème est l'étude de la fonction numérique $F$ définie par $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t}dt$.

**1** Soit $x$ un nombre réel. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $x$ est strictement positif. **Dans la suite on posera pour** $x \in \mathbf{R}_+^*$ :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t}dt$$

**2** Etudier le sens de variation de $F$ sur $]0,+\infty[$.

**3 a)** Montrer que $F$ est une fonction de classe $C^1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et préciser $F'$. **Indication :** on pourra commencer par travailler avec $x \in [\alpha,+\infty[$ et $\alpha > 0$.

**b)** Montrer que $F$ est solution, sur $]0,+\infty[$, d'une équation différentielle linéaire. Est-ce que $F$ est de classe $C^2$ sur $]0,+\infty[$? de classe $C^\infty$ sur cet intervalle ?

**4 a)** Montrer que pour tout réel $x > 0$, $F(x) \geqslant \frac{1}{e}\int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{dt}{1+t}$.

**b)** En déduire l'existence et la valeur de la limite de $F$ en 0.

**5 a)** Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du$$

**b)** Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle strictement positive de limite $+\infty$. Montrer en justifiant avec précision que :

$$\sqrt{x_n}F(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

**c)** Que peut-on déduire en ce qui concerne la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}F(x)$.

**d)** En s'inspirant des précédentes questions, montrer que

$$\sqrt{x}\left(\sqrt{x}F(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} -\frac{1}{2}$$

**5** On s'intéresse dans cette question à l'étude de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par $I_n = F\left(\frac{1}{n}\right)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{du}{1+u} - I_n = \int_0^1 \frac{\sqrt{n}(1-e^{-u^2})}{1+u\sqrt{n}} du - \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{n}e^{-u^2}}{1+u\sqrt{n}} du$$

b) Montrer que chacune des deux suites $\left(\int_0^1 \frac{\sqrt{n}(1-e^{-u^2})}{1+u\sqrt{n}} du\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $\left(\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{n}e^{-u^2}}{1+u\sqrt{n}} du\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente et donner sa limite sous la forme d'une intégrale.

c) Conclure qu'il existe un réel $c$ tel que :

$$I_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\ln n + c + o(1)$$